# Investigação Operacional

http://www.angra.uac.pt/pessoais/docentes/miguel

# Programa

- Introdução à IO
- Programação Linear (PL)
- Teoria de jogos (?)
- Simulação (?)

Não abordado:

- Programação não-linear
- Programação inteira
- Programação dinâmica
- Gestão de stocks
- Filas de espera
- Teoria da decisão
- Previsão
- Programação por metas e multiobjectivo

…

# Bibliografia


- Programação linear volume I,II – Manuel Ramalhete, Jorge Guerreiro, Alípio Magalhães, McGraw-Hill;

- Introduction to operational research – Hillier, Lieberman, McGraw-Hill;

- Investigação Operacional – Luís Valadares Tavares, Rui Oliveira,…, McGraw-Hill;

- Investigação Operacional, Richard Bronson, Govindasami Naadimuthu, McGraw Hill (Collecção Shaum de exercícios).

# Avaliação

- Regime ordinário: 2 testes+trabalho

A decidir…

# Funcionamento das aulas

Aulas dadas sem distinção entre T e TP

# Modelação matemática - Um modelo simples

- Uma turma constituída inicialmente por $N_0$ alunos, com taxa de reprovação anual média R e com entrada anual de V alunos.
- Qual a evolução do número de alunos desta disciplina ao longo do tempo?

$N_1=N_0 R+V$ ;

$N_2=N_1 R+V=(N_0R+V)R+V$;

$N_3=N_2 R+V=(N_1 R+V)R+V=N_0R^3+VR^2+VR+V$

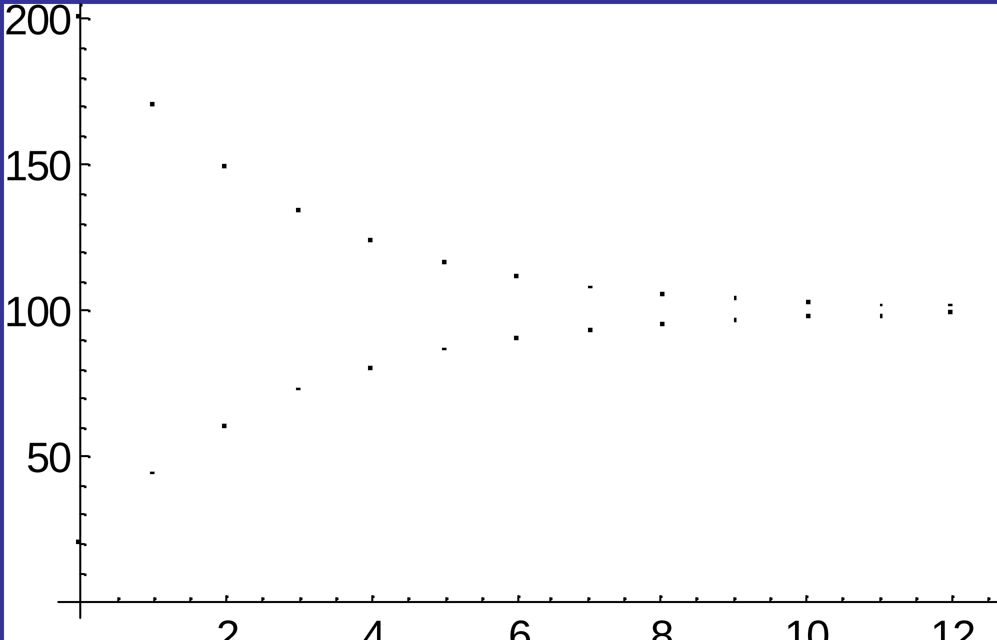
$N_{t+1}=N_0R^{t+1}+VR^t+VR^{t-1}+...VR+V=$

$$N_0R^{t+1}+\sum_{i=0}^{t} VR^i = N_0R^{t+1}+V(\frac{1-R^t}{1-R})$$

O número de alunos irá tender para $N_{final}=V/(1-R)$,
o tempo que leva a atingir o  número de alunos N é

$$t = \frac{\ln\left(\dfrac{N - N_{final}}{N_0 R - N_{final}}\right)}{\ln R}$$

Admitindo uma taxa de reprovações de 70%, o número de novos alunos em cada ano igual a 30, obtemos que a turma estabiliza com 30/(1-0.7)=100 alunos



- Características:
  - Discreto no tempo – unidade 1 ano
  - A variável que define o número de alunos é contínua
  - Determinístico
  - Permite prever o número de alunos em anos futuros e assim ajuda o planeamento a longo prazo
  - Possibilita a obtenção de expressões analíticas simples que caracterizam a evolução temporal do número de alunos

Todos os modelos têm:

- pressupostos (*assumptions)*
- limitações
- previsões – resultados comparáveis com dados reais (poderão ser realistas ou uma mera consequência de pressupostos inadequados)
- características que podem ser melhoradas

# Algumas regras básicas em modelação

- Definir *a priori* o que se pretende modelar.
- Evitar usar modelos feitos por outros ou “packages” sem um conhecimento profundo de como funcionam.
- Começar por modelos simples mesmo que irrealistas
- Melhorar / aperfeiçoar o modelo passo a passo tentando compreender o efeito da alteração introduzida.
- Comparar com a realidade (um acordo entre o modelo e a realidade não significa imediatamente que o modelo esteja correcto).
- Ter noção das limitações do modelo.
- Falar com quem sabe mais...

# Investigação operacional

- O que é? – construção de modelos matemáticos para resolver de forma eficiente problemas em administração de organizações, distribuição óptima de recursos, etc…
- Em que áreas científicas? – Economia, gestão, engenharia, logística + computação e biologia
- Em que tipo de problemas?
  - ✓ Maximizar o lucro ou minizar os custos de uma empresa
  - ✓ Optmização da produção numa industria
  - ✓ Gestão de Hospitais
  - ✓ Organização de tráfego aéreo
  - ✓ Planeamento
  - ✓ Optimização da distribuição (e.g. correio); percurso mínimo.
  - ✓ Previsão (e.g. bolsa de valores)
  - ✓ Definição de reservas ecológicas;  análise de tácticas de sobrevivência
  - ✓ Informática (análise de redes)
  - ✓ Planeamento de operações militares e logística associada
  - ✓ Previsão …

# Investigação operacional

- Limitações
  - ✓ Há sempre pressupostos com implicações no realismo do modelo;
  - ✓ Limitado à análise de uma classe restrita de problemas;
  - ✓ A construção de modelos é dispendiosa
- Áreas associadas
  - Álgebra
  - Estatística
  - Análise
  - Análise numérica
  - Computação
- Técnicas de resolução
  - Analíticas
  - Numéricas (Excel – Solver, software específico –Lingo, Matlab…)
  - Simulação

# Etapas na IO

- Formulação do problema
  - ✓ Especificação do objectivo pretendido e das restrições existentes
- Modelação e implementação
  - ✓ Construção do modelo em linguagem matemática
  - ✓ Reconhecer as simplificações introduzidas
  - ✓ Reconhecer o tipo de problema e usar algoritmos existentes.
- Solução
  - ✓ Determinação da solução óptima
- Avaliação e validação
  - ✓ Comparação do modelo com a realidade
  - ✓ Efeito da variação dos parametros do modelo.
  - ✓ Validar o modelo usando-o para prever o passado.
- Implementação
  - ✓ Fornecimento da solução do modelo  e suas características aos decisores.

# Exemplo simples -1

- A Cátia Vanessa sonha ser modelo e para isso está a seguir uma dieta rigorosa à base de carne e batatas. Esta dieta deverá satisfazer as necessidades diárias

| | carne | batatas | necessidades |
|---|---|---|---|
| Proteínas | 20 | 5 | =40 |
| gordura | 20 | 2 | =60 |
| Hidratos carbono | 5 | 15 | =50 |

Sabendo que uma porção de carne custa 10 unidades monetárias e uma porção de batatas 2 unidades monetárias, determinar a dieta de menor custo.

# Problema de optimização

- Maximizar (minimizar) $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

Sujeito às restrições: $g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ {=,=,=} $b_i$
$i=1..m$

- Programação linear- a função e **<u>todas</u>** as restrições são lineares
- Programação não linear
- Programação inteira (linear/não linear)-alguma ou várias variáveis são inteiras
- Um só objectivo ou múltiplos objectivos (programação multiobjectivo)
- Parâmetros aleatórios- Programação estocástica
- Um só decisor ou vários decisores- Teoria dos jogos

Que tipo de problema é o exemplo anterior?

# Programação linear

- O método do Simplex – George Dantzing, 1947– no top 10 dos algoritmos com mais impacto.
- Problemas muito simples podem ser resolvidos graficamente;
- Problemas simples podem ser resolvidos à mão pelo método do Simplex em tempo razoável;
- Na maioria dos problemas reais o número de variáveis e restrições é elevado e requer o uso de computadores e algoritmos eficientes.

# Exemplo 2

A prova de natação de 4x100 requer 4 nadadores que sucessivamente devem nadar 100m costas, mariposa, bruços e estilo livre. Um treinador dispõe de 6 nadadores cujos tempo nos diferentes estilo são :

| Nadador | Costas | Bruços | Mariposa | Livre |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 65 | 73 | 63 | 57 |
| 2 | 67 | 70 | 65 | 58 |
| 3 | 71 | 69 | 75 | 57 |
| 4 | 67 | 75 | 70 | 59 |
| 5 | 71 | 69 | 75 | 57 |
| 6 | 69 | 71 | 66 | 59 |

Que atletas devem ser selecionados para cada estilo de forma a obter a melhor equipa?

# Exemplo 3

A junta de freguesia de Virtual de baixo possuiu um terreno onde pretende instalar um parque infantil oferecido por multimilionário da terra. O terreno tem 40m de comprimento e 20m de largura. As limitações orcamentais da junta apenas lhe permitem a construção de 80m de muro para vedar o parque. Quais as dimensões máximas do parque a instalar no terreno?

# Teoria de jogos

Dilema do prisioneiro:

Bonnie e Clyde roubam um carro e em seguida assaltam um banco. Infelizmente são apanhados pela polícia. Combinam que o dinheiro encontrado no carro já lá estava quando o roubaram. A polícia propõe aos dois um acordo: denunciar o outro com diminuição de pena

| | Coopera | Denuncia |
|---|---|---|
| Coopera | (1,1) | (5,0) |
| Denuncia | (0,5) | (5,5) |

Qual a melhor opção?

Aplicação: Ciências sociais e políticas, economia, biologia

# Teoria dos jogos

ELSEVIER

Ecological Modelling 150 (2002) 295–307

ECOLOGICAL MODELLING

www.elsevier.com/locate/ecolmodel

## Patch dynamics based on Prisoner's Dilemma game: superiority of golden rule

Kei-ichi Tainaka *, Yu Itoh

*Department of Systems Engineering, Shizuoka University, Hamamatsu 432-8561, Japan*

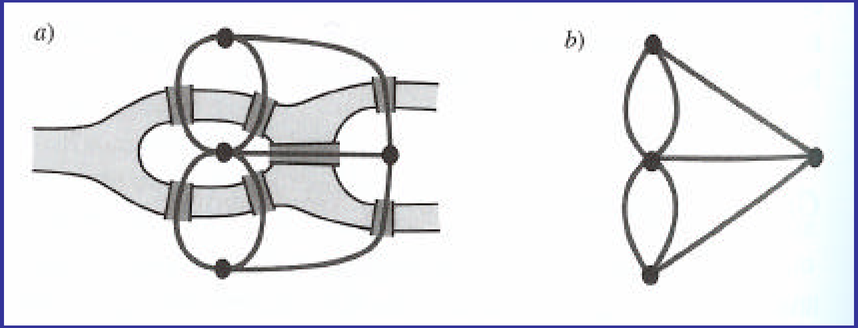
Received 13 February 2001; received in revised form 22 June 2001; accepted 27 August 2001

**Abstract**

There has been much literature on ecological model of Prisoner's Dilemma (PD) game. This game illustrates that cooperation can evolve in situations where individuals tend to look after themselves. In order to explain some behaviors of altruism in animal societies, the strategy All Cooperate (AC), often called the Golden Rule, is more appropriate than other strategies. However, very little is known about the superiority of AC. In the present article, we study patch dynamics based on non-iterated PD game, applying two different methods: island and lattice models. Each patch is assumed to be either vacant or composed of a population of AC or All Defect (AD), where AD means a selfish strategy. Both models exhibit a phase transition between a phase where both AC and AD survive, and a phase where AD is extinct. The latter phase means that AC beats AD completely. In the case of lattice model, the extinction of AD easily occurs and the abundance of AC takes a larger value, compared with the island model. Our models can be also extended to general iterated PD game; we describe the reason why AC can outperform any other strategy. 

# Gestão de projectos e redes (grafos)

- Problema clássico de Euler: Visitar 4 bairros da cidade de Konigsberg regressando ao ponto de partida e passando uma só vez pelas pontes sobre o rio Pregel




- Problemas:Redes de esgotos, abastecimento de água, caminhos (estrada, linha férrea),…

- Aplicações: Planeamento de transportes e de distribuição; gestão de projectos

# Problema de optimização

- Maximizar (minimizar) $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

Sujeito às restrições: $g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ {=,=,=} $b_i$
i=1,...,m

- Programação linear- a função e **<u>todas</u>** as restrições são lineares
- Programação não linear
- Programação inteira (linear/não linear) – alguma ou várias variáveis são inteiras
- Um só objectivo ou múltiplos objectivos (programação multiobjectivo)
- Parâmetros não determinísticos - Programação estocástica
- Um só decisor ou vários decisores- Teoria dos jogos

# Programação linear

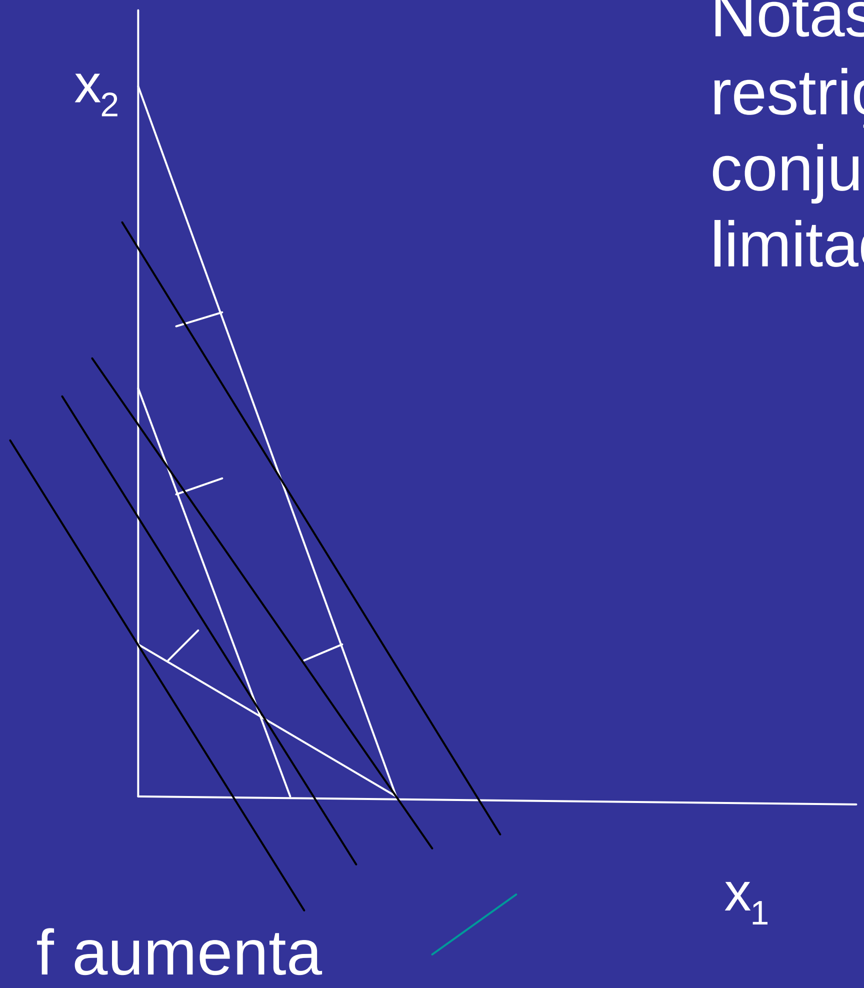
- Base para a programação inteira, programação não-linear, programação multiobjectivos, programação por metas, etc
- O método do Simplex – George Dantzing, 1947– no top 10 dos algoritmos com mais impacto.
- Problemas muito simples podem ser resolvidos graficamente;
- Problemas simples podem ser resolvidos à mão pelo método do Simplex em tempo razoável;
- Na maioria dos problemas reais o número de variáveis e restrições é elevado e requer o uso de computadores e algoritmos eficientes.

# Exemplo dieta

- Quais as variáveis do problema?
  - Quantidade de carne – $x_1$
  - Quantidade de vegetais – $x_2$
- Quais as restrições:?
  - proteínas: $20x_1+10x_2=40$
  - Gordura: $20x_1+2x_2=60$
  - Hidratos carbono: $10x_1+10x_2=30$
  - $x_1$, $x_2$ são variáveis não negativas
- Objectivo?

– minimizar custo da dieta: Min $f=10x_1+6x_2$

# Exemplo dieta




Notas: O conjunto definido pelas restrições do problema de PL é um conjunto convexo fechado e quando limitado designado por **Simplex**

O mínimo pretendido é obtido num dos extremos do poliedro

Refazer o problema quando $f=10x_1+3x_2$